Einstein en bicicleta

En una de sus frases más recordadas, Albert Einstein afirmaba con humor y perspicacia que: *la vida es como andar en bicicleta, para conservar el equilibrio debes mantenerte en movimiento*. La génesis de esta frase no es hecho meramente anecdótico, pues se cuenta que el gran científico era muy aficionado al pedaleo. Incluso se ha dicho que Einstein se encontraba conduciendo una bicicleta cuando descubrió algunas ideas fundamentales que habrían dado forma a su célebre teoría de la relatividad. Sin embargo, más allá de las elucubraciones que le llevaron a revolucionar la física del siglo XX, es evidente que mientras Einstein pedaleaba, su incasable y agudo intelecto debe haber considerado problemas de muy diversa índole. Incluso puedo imaginarlo meditando acerca de alguna curiosa propiedad física de las bicicletas. Una pregunta muy interesante que el ilustre científico podría haberse formulado, y que guarda directa relación con la fotografía que aparece abajo, es la siguiente: ¿Por qué se inclina la bicicleta cuando tomamos una curva?

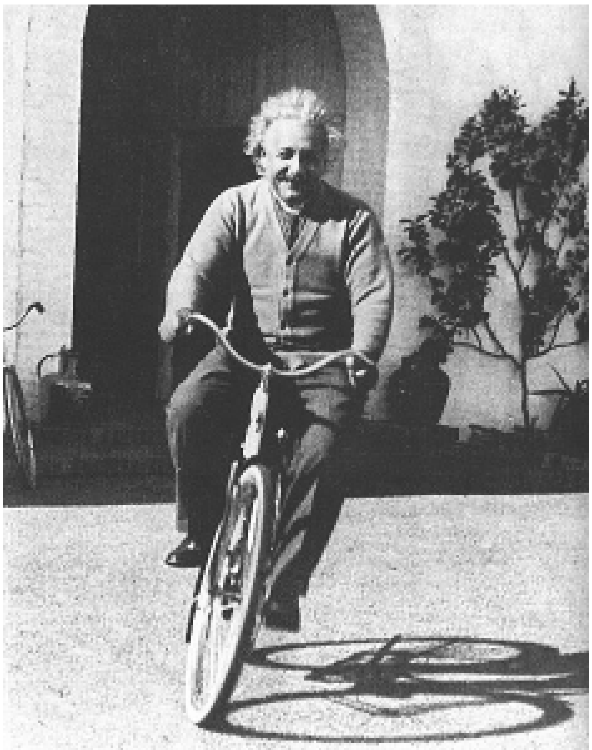

Figura 1. Fotografía tomada a Einstein en 1933 en Santa Bárbara.

Para intentar responder la interrogante de Einstein con la extensión y el rigor que requiere, antes será necesario introducir un par de nociones de gran importancia en diversos ámbitos de la física: me refiero a los conceptos de *torque* y *centro de gravedad*. En relación a este último, cabe señalar que ha sido abordado en otro artículo[1], de modo que solo mencionaré brevemente que, tal como indica su nombre, el centro de gravedad de un objeto es el punto de aquel donde se ejerce

[1] Para más detalles se puede revisar la página 1 del artículo "*El artilugio de mi abuelo*".

la fuerza de gravedad (el peso). En otras palabras, para efectos de determinar el lugar donde actúa la fuerza de gravedad, los cuerpos se comportan como si toda su masa estuviera íntegramente concentrada en un punto al que llamamos *centro de gravedad*.

Respecto del concepto de torque, también llamado *momento de una fuerza* o simplemente *momento*, podemos comenzar definiéndolo como un análogo de las fuerzas para el caso de las rotaciones. En otras palabras, el torque es a las rotaciones como las fuerzas son a las traslaciones. Por ejemplo, si usted desea que un cuerpo en reposo se ponga en movimiento (se traslade), deberá aplicarle una fuerza; lo mismo sucede si desea detener un cuerpo que está en movimiento. En forma equivalente, si usted desea que un objeto experimente una rotación (o que deje de rotar), debe aplicarle un torque. ¿Cómo se consigue esto? Pues simplemente ejerciendo una fuerza en un lugar estratégico. Pensemos en una puerta que se encuentra abierta y que deseamos cerrarla usando alguna de nuestras manos. Para alcanzar nuestro cometido, debemos poner una mano sobre la chapa, para luego aplicar una fuerza. Imagine ahora que intentamos cerrar la puerta empujándola no desde su manilla, sino desde un punto que se encuentre más cerca de la bisagra, la cual actúa como eje de rotación. Si le parece extraño imaginarse abriendo o cerrando puertas de este modo, debo decir que he sacado a colación este ejemplo por su valor pedagógico, puesto que ahora estamos en condiciones de plantearnos preguntas como la siguiente: ¿Cómo se compara la fuerza aplicada directamente sobre la manilla, respecto de aquella ejercida cerca de la bisagra? Le sugiero que abandone la lectura por unos segundos y haga la prueba, es decir, aplique distintos torques sobre alguna puerta, poniendo su mano a diferentes distancias del eje de rotación... eso si, procure que nadie lo vea haciendo esto, pues podrían pensar que padece algún tipo de manía (lo digo por experiencia propia). Si realiza la prueba, pronto descubrirá que cuanto más lejos de la bisagra ubique la mano, más fácil le será conseguir que la puerta rote y se cierre (es por eso que las manillas se ubican en los extremos de las puertas). Por el contrario, cuanto más cerca se encuentre su mano de la bisagra, más difícil será conseguir que la puerta rote.

¿Cual es la moraleja de este ejemplo? Pues simplemente que el torque no sólo depende de la fuerza ejercida, sino también del punto de aplicación de la misma. Por lo tanto, estamos en condiciones de definir de manera un poco mas formal la noción de torque, señalando que este es proporcional tanto a la fuerza aplicada, como a la distancia de aplicación respecto al eje de rotación. Sólo como dato anecdótico cabe mencionar que esta última distancia recibe el nombre de *brazo de palanca*. Pero el asunto no termina aquí, pues también debemos preguntarnos, ¿cómo se puede anular el efecto de un torque? Regresando a nuestra analogía entre las fuerzas y los torques, si tenemos un cuerpo sobre el cual actúa una fuerza y deseamos que permanezca en reposo, entonces debemos aplicarle una fuerza de igual magnitud que la primera, pero de sentido contrario. En estas condiciones podemos decir que las dos fuerzas se anulan. Con los torques sucede lo mismo. Si alguien ejerce un torque sobre una puerta intentando cerrarla, para impedir que esto ocurra debemos aplicar un torque de igual magnitud que el anterior pero en sentido contrario. Ahora bien, existen importantes diferencias entre la noción familiar de “sentido de una fuerza” y el concepto más abstracto de “sentido de un torque”. Por fortuna, no necesitamos ahondar sobre este punto, pues todo lo que requerimos para seguir en movimiento y no perder el equilibrio, puede ser captado apelando a la intuición y al sentido común.

Pero basta de explicaciones aburridas, y regresemos a la profunda interrogante que ocupa la mente de Einstein mientras pedalea. ¿Por qué se inclina la bicicleta cuando tomamos una curva? De seguro en más de una ocasión se ha encontrado a bordo de un vehículo cuando este toma una curva, y en aquel instante habrá experimentado la sensación de que su cuerpo tiende a inclinarse en sentido contrario a la dirección de giro del vehículo. Es decir, mientras el vehículo se mueve en una cierta dirección para tomar la curva, su cuerpo tiente a moverse en la dirección contraria. Para poner un ejemplo menos familiar pero más académico: imaginemos una regla parada sobre uno de sus extremos y haciendo equilibrio en el borde de un disco horizontal. Imagine también que utilizamos una cinta de scoch para sujetar la regla al disco, a modo de bisagra. Si el disco comienza a girar, la regla volteará hacia afuera. La única manera de encontrar un equilibrio y que la regla no voltee ni hacia dentro ni hacia fuera es inclinándola un ángulo preciso en la dirección del eje de rotación. Vale decir, al inclinar hacia dentro la regla, aparece un torque actuando sobre ella en su centro de gravedad, y que es producido por su peso. Con la bicicleta ocurre exactamente lo mismo. La siguientes figuras muestran la situación real y una representación idealizada. En el lado izquierdo se muestran dos de las fuerzas que actúan sobre Einstein y su bicicleta: el peso (fuerza de gravedad), y la fuerza de roce entre el suelo y la rueda delantera[2]. Por simplicidad, en el lado derecho se considera que Einstein junto con la bicicleta forman un solo cuerpo rígido y extenso en forma de óvalo, provisto de una sola rueda, y cuyo punto de contacto con el suelo corresponde al lugar donde se ejerce la fuerza de roce. En ambas ilustraciones se observa que el conjunto bicicleta-Einstein forma un cierto ángulo de inclinación respecto de la vertical.

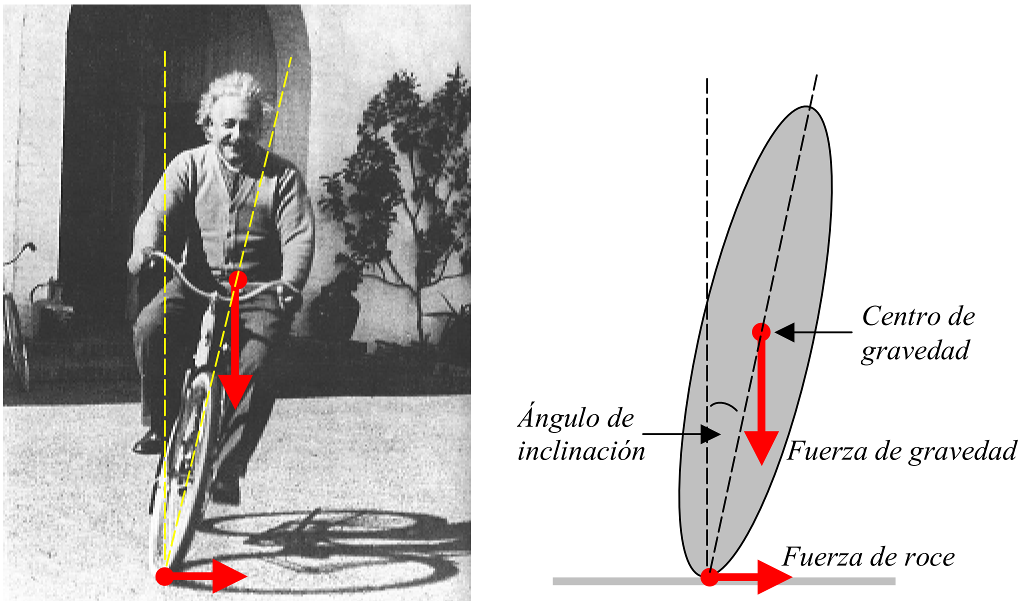

Figura 2. A la izquierda aparecen algunas de las fuerzas que actúan en la situación real. A la derecha se muestra una representación esquemática, donde se ha supuesto que Einstein y su bicicleta forman un solo cuerpo rígido y extenso, provisto de una rueda.

Si las suposiciones anteriores le parecen extrañas o poco realistas, debo decir en mi defensa que es practica habitual es física hacer abstracción de todos los elementos accesorios de un problema, para centrar la atención exclusivamente en lo relevante. Desde luego, no se me ha cruzado por la mente insinuar que el buen Einstein sea un personaje irrelevante, pero como el ilustre científico sabía muy bien, debemos ser sumamente cuidadosos al momento de decidir cuales ingredientes incorporar en un problema. ¿Cómo saber qué ingredientes debemos incluir y cuales descartar?

[2] Por simplicidad, se ha omitido la fuerza normal y la fuerza de roce sobre la rueda trasera.

Bueno, por desgracia no existe una receta. Un cocinero y un físico adquieren su buen gusto y su olfato como resultado de un trabajo arduo y prolongado.

Regresando a la figura 2, observamos que el peso se ejerce en el centro de gravedad del conjunto bicicleta-Einstein. Usando una analogía con nuestra conspicua puerta, vemos que el punto de contacto entre la rueda y el suelo actúa como una bisagra, el centro de gravedad hace las veces de manilla, mientras el peso es el equivalente de nuestra mano, tirando del conjunto hacia el suelo. Con ello se explica claramente la necesidad de la inclinación de la bicicleta, pues el torque debido al peso tiende a girarla hacia el lado derecho de la figura, contrarrestando de este modo su tendencia a rotar en sentido contrario, producto de la curva tomada por Einstein. Sin embargo, esto genera una nueva pregunta: ¿Por qué la bicicleta no cae, dado que se encuentra inclinada? Pues bien, la solución del problema comienza a vislumbrarse al constatar que si la bicicleta no se encontrara en movimiento y tomando una curva, esta caería al suelo. Por otra parte, debemos recordar que para anular un torque se requiere de otro que posea igual magnitud pero sentido contrario al primero. ¿Cuál es el torque que anula el efecto del peso sobre la bicicleta? Si miramos atentamente la figura 2 una vez más, descubriremos que la respuesta nos la entrega la fuerza de roce, la que a su vez es consecuencia de la curva que la bicicleta está tomando, pues de no ser por la maniobra de giro efectuada por Einstein, el roce en dirección al centro de giro no existiría. En efecto, siendo majadero, si usamos una vez más la analogía con la puerta, es fácil convencerse de que la fuerza de roce ejerce un torque en sentido contrario al que produce la fuerza de gravedad, pues mientras esta última tiende a hacer que la bicicleta caiga al suelo, el roce tiende a girar la bicicleta en sentido contrario, contrarrestando el peso y evitando la caída. Naturalmente, existe un ángulo preciso que permite que los torques se equilibren y que la bicicleta no voltee ni hacia fuera ni hacia dentro (ver el apéndice).

Pero además de oponerse al torque producido por la fuerza de gravedad, el roce cumple otra función de suma importancia en el problema que nos ocupa, pues ella es la que provee la fuerza necesaria para tomar una curva. Para entender este punto de forma intuitiva, imaginemos que la bicicleta se mueve en línea recta y que repentinamente el buen Einstein intenta tomar una curva sobre un tramo del camino que se encuentra aceitado o cubierto de hielo; obviamente, la bicicleta se deslizará y seguirá moviéndose en línea recta, mientras que el destino más probable de nuestro ilustre ciclista será terminar en el suelo después de sufrir una estrepitosa caída. Vemos entonces que el roce aparece como resultado de la curva tomada por la bicicleta, produciendo la fuerza que permite que esta se desvíe de su trayectoria rectilínea. Además, cabe mencionar que el roce siempre tiene la dirección y el sentido del centro de giro. En este contexto decimos que el roce ejerce una fuerza centrípeta, porque apunta hacia el centro. Y dado que el viaje de Einstein en bicicleta está llegando a su fin, no está demás señalar que las conclusiones que hemos obtenido son aplicables tanto a una bicicleta como a una moto, o a cualquier otro vehículo de similares características.

Naturalmente, considero poco probable que Einstein hubiese abordado el problema que nos ocupa con la extensión y la minuciosidad que nosotros le hemos dedicado, pues su aguda intuición y su extraordinario dominio de la física seguramente le habrían conducido a la repuesta en fracción de segundos, dejando su mente en libertad para considerar otros problemas, o quizá para concentrarse en el pedaleo, mantenerse en movimiento y no perder el equilibrio.

¿Quiere saber más?

La siguiente figura (Fig. 3) muestra el conjunto bicicleta-Einstein en forma de óvalo analizado antes, pero en este caso se han incorporado todas las fuerzas en juego, además del ángulo de inclinación α respecto de la vertical. Vemos que el peso $\vec{P}$ se ejerce en el centro de gravedad del sistema. Se observa también que en el punto de contacto entre la rueda y el suelo actúan la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de roce $\vec{F}_r$. Como se ha mencionado antes, este última es la que proporciona la fuerza centrípeta que permite a la bicicleta tomar la curva. La fuerza designada como $\vec{R}$ es la reacción del piso y corresponde a la suma vectorial de las fuerzas de roce y normal.

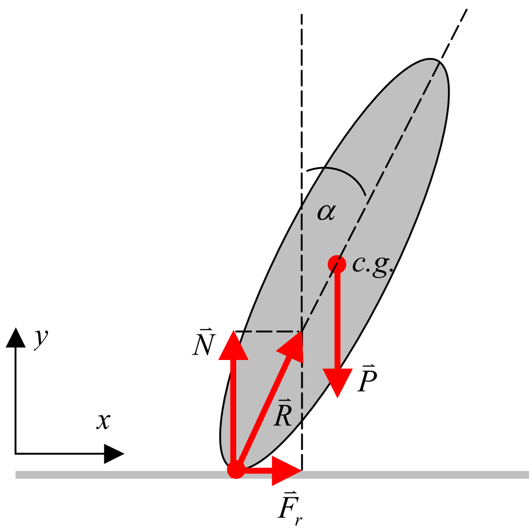

Figura 3. La bicicleta de Einstein toma una curva de radio r con una inclinación α respecto de la vertical. El peso $\vec{P}$ actúa en el centro de gravedad (c.g.). La normal $\vec{N}$ se ejerce en el punto de contacto entre la rueda y el piso, al igual que el roce $\vec{F}_r$. Está última es la que proporcional la fuerza centrípeta.

La dirección de $\vec{R}$ coincide con la inclinación de la bicicleta, de modo que la proyección de este vector pasa por el centro de gravedad del sistema. Esto último puede no resultar evidente para muchos lectores, así que dejaremos la demostración para el final de la discusión. Por de pronto, apelo a la confianza de mis amables lectores. Aclarado este punto, estamos en condiciones de aplicar la segunda ley de Newton al problema que nos ocupa, notando que a partir de la figura 2 podemos escribir las siguientes igualdades:

$$F_r = R\sin\alpha \qquad (1)$$

$$N = R\cos\alpha \qquad (2)$$

A partir de (1) y (2), y efectuando sumatoria de fuerzas separadamente sobre los ejes x e y resulta:

$$\sum F_x = m\frac{v^2}{r} = F_r \rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = R\sin\alpha \qquad (3)$$

$$\sum F_y = 0 = P - N \rightarrow \quad mg = R\cos\alpha \qquad (4)$$

En estas ecuaciones, v es la velocidad al tomar la curva, m es la masa del conjunto bicicleta-Einstein, y r es el radio de giro. Si ahora dividimos miembro a miembro las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{v^2}{gr} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Por lo tanto,

$$v^2 = gr\tan\alpha$$

Esta ecuación nos proporciona valiosa información acerca de la bicicleta y su ilustre conductor. Nos dice, por ejemplo, que el ángulo de inclinación α es independiente de la masa, y que a mayor velocidad, más inclinada debe encontrarse la bicicleta. También nos dice que para una rapidez fija, cuanto menor es el radio de giro, mayor deberá ser α.

Ahora demostraremos que la proyección del vector $\vec{R}$ pasa por el centro de gravedad del conjunto bicicleta-Einstein. Para ello, supondremos que $\vec{R}$ forma un ángulo distinto de α respecto de la vertical, al que designaremos por β. Además, vamos a efectuar sumatoria de torques respecto del centro de gravedad del sistema. En estas condiciones, el torque ejercido por el peso es nulo. Llamemos d a la distancia desde el centro de gravedad hasta el punto de contacto de $\vec{F}_r$ y $\vec{N}$ con el suelo. Como los torques efectuados por estas dos fuerzas se anulan, resulta:

$$N(d\sin\beta) - F_r(d\cos\beta) = 0$$

Introduciendo las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$R\cos\alpha(d\sin\beta) - R\sin\alpha(d\cos\beta) = 0$$

Factorizando y empleando una conocida identidad trigonométrica:

$$Rd(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = 0 \rightarrow \quad \sin(\beta - \alpha) = 0$$

Pero el seno de un ángulo sólo se anula cuando su argumento también se anula, de modo que:

$$\beta = \alpha$$

Tal como habíamos anticipado, la proyección del vector $\vec{R}$ pasa necesariamente por el centro de gravedad del sistema.

Jorge Pinochet I.
Licenciado en Física, Universidad Católica de Chile