

Todo lo que baja tiene que subir

Imagine, querido lector, que fuese posible excavar un enorme túnel rectilíneo que atravesara nuestro planeta de extremo a extremo, pasando por su centro. ¿Qué cree que ocurriría si usted tuviese la osadía de lanzarse al interior de este túnel? Semejante pregunta quizá le resulte un poco descabellada. Sin embargo, ilustres pensadores como el filósofo Voltaire y el matemático Maupertuis se plantearon la misma interrogante durante el siglo XVIII y soñaron con llevar adelante la construcción de un túnel que atravesara la Tierra.

Antes de intentar responder a la pregunta que nos ocupa, introduzcamos algunas simplificaciones que harán la discusión más llana. En primer lugar, despreciemos la resistencia del aire durante la caída en el pozo, de modo que el efecto amortiguador debido al rozamiento pueda ser ignorado. En segundo lugar, supongamos que la densidad de la Tierra es uniforme, lo cual significa que si extrae una muestra de un metro cúbico de material desde cualquier lugar de nuestro planeta, la masa de dicha muestra será siempre la misma. Finalmente, para evitar que termine calcinado durante su imaginario descenso en el pozo, supongamos que el túnel puede construirse de modo que esté aislado de las enormes temperaturas que imperan en el interior de la Tierra, las cuales, dicho sea de paso, alcanzan valores de hasta 6.000 Kelvin (6.000 K).

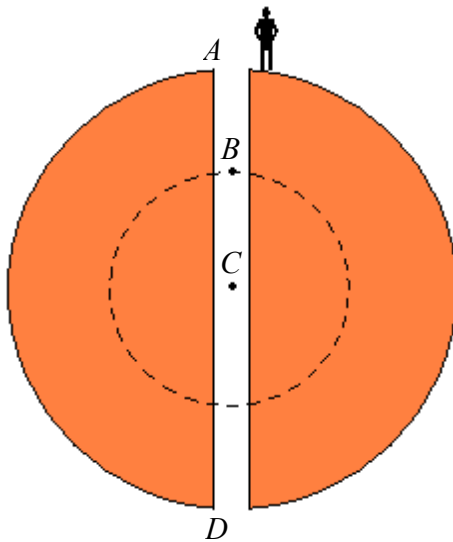


Figura 1. La Tierra es atravesada de extremo a extremo por un túnel rectilíneo que pasa por su centro. Un imaginario aventurero se deja caer desde el punto A hacia el interior de la Tierra cuyo centro está en C.

Lo primero que debemos descartar durante su descenso en el pozo es un posible impacto contra el fondo, puesto que se trata de un túnel sin fondo. No obstante ello ¿se detendrá en algún punto del pozo? Siendo así ¿en qué lugar se detendrá? Suponga que se deja caer hacia el pozo desde el punto designado por A en la figura 1, de tal forma que su rapidez inicial sea nula. Es evidente que durante todo el trayecto AC que le separa del centro C de la Tierra, usted se mantendrá descendiendo libremente debido a la atracción gravitacional, que estará siempre dirigida hacia el centro de la Tierra. Sin embargo, la situación no resulta tan simple como podría pensarse en un primer momento, debido a que la fuerza gravitacional se va debilitando paulatinamente en la medida que desciende. En efecto, acudiendo a un teorema debido al matemático Gauss se puede demostrar que la

fuerza gravitacional que experimenta un objeto situado en algún punto en el interior de la Tierra, y a una distancia r de su centro, se debe totalmente a la porción de materia contenida en la esfera de radio r . Por ejemplo, cuando esté ubicado en el punto B de la figura 1, la fuerza que experimente se deberá íntegramente a la masa encerrada por la esfera de radio BC que está limitada por la línea punteada. La masa que está por sobre la línea punteada no ejercerá ninguna fuerza sobre su cuerpo. Por otro lado, a pesar de la disminución paulatina de la fuerza gravitacional, su rapidez aumentará continuamente en la medida que desciende hacia C , hasta alcanzar un valor máximo de aproximadamente 8.000 metros por segundo (m/s), justo en el centro de la Tierra. Una rapidez nada despreciable si recordamos que el sonido se desplaza en el aire a 340 m/s (a una temperatura de 15°C).

Veamos ahora que ocurre después de que usted ha atravesado el centro de la Tierra, y se encuentra viajando plácidamente en el tramo CD . Siguiendo con el razonamiento anterior, concluimos que en dicho tramo la fuerza gravitacional, que apuntará en sentido contrario a su dirección de movimiento, aumentará paulatinamente en la medida que se aleja de C . De hecho, durante su recorrido desde C hacia D experimentará una desaceleración, de manera que su rapidez disminuirá gradualmente hasta hacerse cero al llegar a D ¹. Tal vez se pregunte, ¿porqué la rapidez no se hace cero después de llegar D ? Si está familiarizado con el principio de conservación de la energía mecánica, la respuesta es inmediata: porque si llegara a D con rapidez no nula, entonces tendría suficiente energía (cinética) para elevarse una cierta distancia por sobre la superficie terrestre, pero como en el punto A comenzó su descenso desde la superficie misma, con rapidez nula, aquella altura adicional respecto a D implicaría que tiene... ¡más energía que al comienzo del viaje!

Si usted es de aquellos que detestan la monotonía, le recomiendo que al llegar a D se agarre firmemente de los bordes del túnel porque, de otro modo, todo volverá a repetirse. Por si aún no lo ha adivinado, el movimiento que resultaría de su imaginario viaje al interior del pozo sería oscilatorio. Vale decir, se movería indefinidamente de un extremo a otro de la Tierra, describiendo un vaivén², en forma análoga a como se mueve un cuerpo suspendido de un resorte ideal. Los físicos empleamos un nombre especial para describir este vaivén: *movimiento armónico simple (m.a.s.)*. Debe quedar muy claro que este nombre está reservado para designar una clase especial de vaivén. En otras palabras, no cualquier movimiento oscilatorio será *m.a.s.* En nuestro caso, el *m.a.s.* es consecuencia directa de las hipótesis simplificadoras introducidas al comienzo (densidad uniforme y resistencia nula del aire). En estricto rigor, si dejamos de lado dichas hipótesis, su movimiento a través del pozo no será *m.a.s.*, aunque continuaría siendo oscilatorio. Sin embargo, junto con simplificar enormemente la discusión, nuestras hipótesis tienen el mérito de entregarnos algunas cifras bastante realistas, haciendo uso de matemáticas muy accesibles. Así por ejemplo, después de algunos cálculos, se encuentra que el periodo de nuestro *m.a.s.* es de 84.2 minutos, vale decir, este es el tiempo que le tomaría un viaje de ida y vuelta desde el punto A (o desde el B). Por lo tanto, el tiempo en desplazarse desde A hasta D (o desde D hasta A) será la mitad de aquel valor, esto es, 42 minutos. Un intervalo de tiempo extraordinariamente breve, comparado con la duración de un vuelo comercial promedio que

¹ En estricto rigor, su rapidez se reduciría a cero antes de llegar a D debido a la fricción con el aire.

² Nuevamente, el rozamiento con el aire complica las cosas, puesto que atenuaría gradualmente sus oscilaciones hasta que, finalmente, después de transcurrido mucho tiempo, se encontraría en reposo en el centro de la Tierra.

vijara entre dos puntos de la Tierra diametralmente opuestos, como por ejemplo, el polo norte y el polo sur.

Quizá, más de algún lector se esté preguntando si el movimiento de rotación de la Tierra puede afectar de algún modo el viaje a través del túnel, y la respuesta es que sí lo afecta. La excavación perfectamente rectilínea que hemos descrito sólo resulta posible a condición de que el pozo coincida con el eje de rotación de la Tierra, uniendo el polo norte con el polo sur, puesto que el movimiento de rotación desviaría su trayectoria con relación a la Tierra. Dicha desviación puede explicarse recordando que mientras usted desciende por el túnel, la inercia tenderá a conservar su trayectoria inicial, mientras que al mismo tiempo la Tierra se encuentra girando.

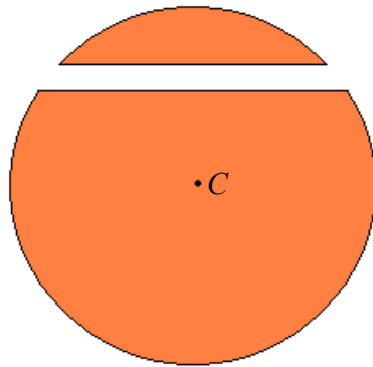


Figura 2. Un agujero rectilíneo que no pasa por el centro C de la Tierra.

Por otra parte, dejando de lado los problemas derivados del movimiento de rotación, si en vez de atravesar la Tierra por su centro, fuese posible excavar un túnel rectilíneo como el que aparece ilustrado en la figura 2, el movimiento resultante también sería *m.a.s.* con un periodo igual al anterior, es decir, 84,2 minutos. De hecho, un poco de cálculo revela que el periodo de las oscilaciones es independiente de la longitud del túnel. Más interesante aún, dicho periodo es el mismo que el de un satélite con una órbita circunferencial apenas por sobre la superficie terrestre.

Posiblemente no lo ha notado, pero un túnel con las características del que aparece en la figura 2, podría utilizarse para implementar un sistema de transporte que permita recorrer grandes distancias en tiempos muy breves y consumiendo un mínimo de combustible. La principal fuente de energía provendría, naturalmente, del campo gravitacional terrestre. Por desgracia, la fuerza de gravedad no podría aportar toda la energía necesaria para impulsar este medio de transporte debido a la fricción, lo que obligaría a contar con una fuente de energía auxiliar. Después de todo, la idea no parece tan descabellada. Quizá, en un futuro cercano, el túnel que soñaron Voltaire y Maupertuis termine por convertirse en realidad.

¿Quiere saber más?

Supongamos que la Tierra es un cuerpo esférico de masa M , radio R y densidad uniforme ρ . De acuerdo a la ley de la gravitación universal de Newton, la fuerza ejercida por la Tierra sobre un objeto de masa m situado en el túnel a una distancia r de su centro, vendrá dada por:

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

Sea V el volumen de la Tierra. Luego, su masa puede escribirse como,

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (2)$$

Introduciendo la expresión (2) en la (1) resulta:

$$F = -G \frac{(\rho 4\pi r^3)m}{3r^2} = -\left(G\rho \frac{4\pi m}{3}\right)r = -kr \quad (3)$$

donde $k = (G\rho 4\pi m)/3$. Notemos que la ecuación (3) es idéntica a la conocida *ley de Hooke*, que proporciona la fuerza ejercida por un resorte de constante elástica k estirado una distancia r . Esperamos, por tanto, que el movimiento a través del túnel sea análogo al de un objeto unido a un resorte. Esto corresponde exactamente al criterio que define un *m.a.s.* Ahora bien, sabemos que el periodo T de las oscilaciones de un resorte viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

El periodo del movimiento en el túnel se obtiene introduciendo en (4) el valor de k dado más arriba:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(G\rho 4\pi m)/3}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Tomando $\rho = 5,51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ resulta finalmente,

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{(6,67 \times 10^{-11})(5,51 \times 10^3)}} = 5.050s = 84,2 \text{ min}$$

Con un poco más de trabajo, se puede determinar la rapidez que tendrías al pasar por el centro de la Tierra.

Jorge Pinochet I.
Licenciado en Física, Universidad Católica de Chile