

Secuencia pedagógica Proyecto Eratóstenes

Para que el desarrollo de este proyecto sea parte de un proceso de aprendizaje, que culmine con las mediciones de sombras y el análisis de los datos para obtener el largo de la circunferencia de la Tierra, le proponemos realizar junto a sus estudiantes las siguientes actividades previas.

- **¿Cómo lo hizo Eratóstenes?:** Una breve descripción histórica de los pasos seguidos por Eratóstenes para realizar su medición
- **¿Qué es el mediodía solar?:** Desarrollar con los estudiantes el concepto de mediodía solar, y su importancia para este experimento
- **Triángulos semejantes:** Un breve repaso matemático que les permita a los estudiantes comprender el proceso matemático mediante el cual se llega a obtener la circunferencia de la Tierra
- **¿Cómo mido el ángulo?:** Se proponen aquí dos vías posibles, dependiendo del desarrollo matemático de los estudiantes
 - o Dibujo de un triángulo a escala y medición directa en él de los ángulos
 - o Uso de función arcotangente
- **Midiendo el radio de una pelota:** Para comprobar y reforzar el proceso se simula el experimento midiendo el radio de una esfera de plumavit

Cada una de estas actividades tiene como sentido reforzar elementos necesarios de manejar para el desarrollo de la experiencia. Por lo mismo, depende del criterio de cada docente evaluar la necesidad de desarrollar estas actividades en función del conocimiento y manejo que tengan sus estudiantes respecto de estos elementos. El detalle de las actividades propuestas por el grupo Profísica para desarrollar o reforzar cada uno de estos contenidos y habilidades se presentan a continuación.

¿Cómo lo hizo Eratóstenes?¹



Son increíbles las cosas que pueden hacerse usando nuestra capacidad de observar y algunos materiales sencillos. Es increíble además como muchas cosas pasan a nuestro alrededor sin que nosotros nos demos cuenta, y como podemos maravillarnos de ellas simplemente mirándolas con otros ojos. Algo así le paso a un gran sabio griego hace ya más de 2200 años.

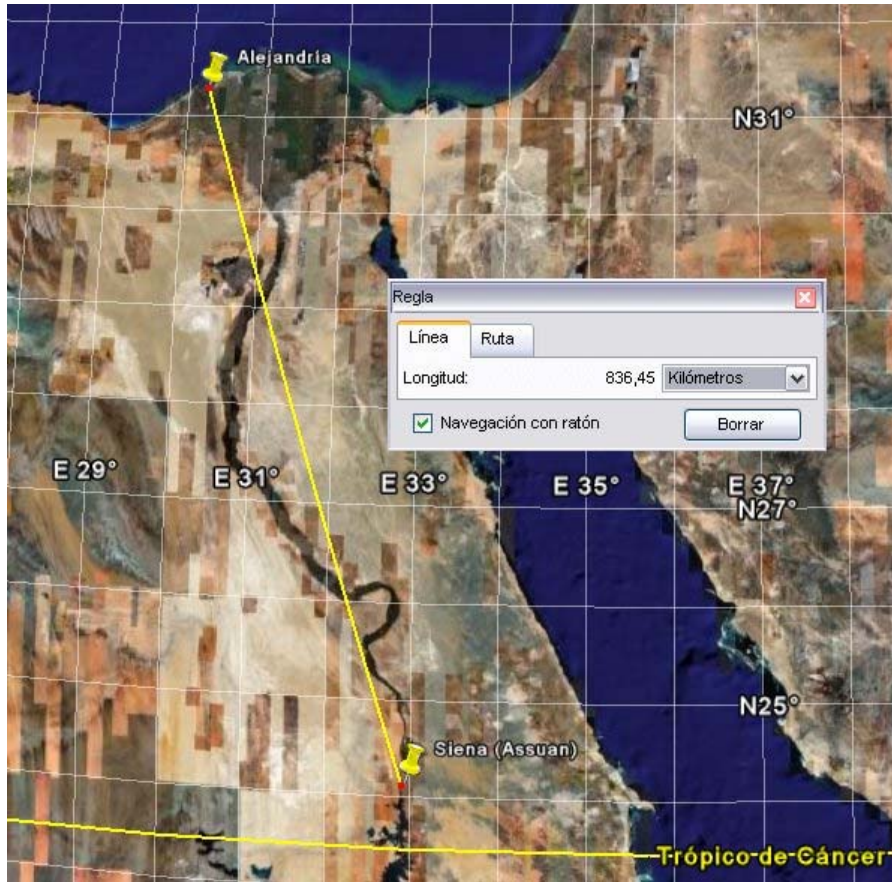
Eratóstenes de Cirene nació precisamente en la ciudad de Cirene (actual Libia) en 276 AC. . Fue, como muchos hombres sabios de su tiempo astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Sus conocimientos lo llevaron a ocupar un puesto muy importante para los sabios de la Antigüedad: Director de la Biblioteca de Alejandría. Alejandría era la ciudad más importante de su época, famosa por su gran faro (una de las siete maravillas del mundo) y por su enorme biblioteca, la más grande en su época.

Como director de la biblioteca de Alejandría, Eratóstenes debía revisar y clasificar todo el material que allí existía. Se cuenta que en este proceso encontró un papiro que contaba un curioso fenómeno: En un lugar llamado Siena, cerca de la primera catarata del Nilo, el día del solsticio de verano (21 de junio en el hemisferio norte) el Sol se reflejaba de manera directa en el fondo de un pozo, fenómeno que es equivalente a poner una vara de manera vertical en el suelo y que no proyecte ningún tipo de sombra.

Esta era una observación que muchos podrían haber ignorado con facilidad, pero no Eratóstenes. Armado de una paciencia difícil de tener en nuestros días, se trasladó desde Alejandría hasta Siena y acampó alrededor de un año junto a un pozo, mirando las estrellas durante la noche y el sol durante el día, hasta que observó el fenómeno que describía el papiro. Con la paciencia y el tesón de un buen científico se trasladó nuevamente a Alejandría, la que según los datos de su tiempo estaba justo al Norte de Siena. En este viaje midió cuidadosamente la distancia entre Alejandría y Siena. Varias historias se cuentan al respecto: Que pidió a un grupo de soldados que marcharan y contó los pasos de dichos soldados, que contrató a un grupo de camelleros y realizó directamente las mediciones, entre otras. Lo que se sabe es que obtuvo que la distancia entre ambas ciudad era de 4371 estadios (unos 800 Kilómetros). Una vez que llegó a Alejandría, esperó nuevamente hasta la misma fecha que observó que en Siena el Sol caía directamente sin producir sombra sobre un pozo. Grande fue su sorpresa al descubrir que en Alejandría sí se producía sombra. Armado con una vara perpendicular al suelo, midió la sombra que

¹ Adaptado de <http://www.escueladeinvierno.cl/eratos.htm>, <http://www.shoa.cl/Vaul/Vaul/TemasProfesionales/TemasProfesEspeciales1.htm>, http://tierrachunga.blogspot.com/2007_12_01_archive.html

proyectaba la vara, y usando esa medida y la distancia entre Siena y Alejandría, fue capaz de estimar el ángulo que separa a estas ciudades (medido desde el centro de la Tierra), y desde allí deducir el valor de la circunferencia terrestre, obteniendo un valor que, según algunos estudios, falla en apenas un 1% del valor real de la circunferencia de la Tierra (40.075 Km en el Ecuador).



Mapa obtenido desde Google Maps que muestra las ciudades de Alejandría y Siena y la distancia real que las separa.

Claro que la medida tiene errores. Eratóstenes era consciente que el cálculo de la distancia era sólo aproximada. Pero se equivocó al situar Siena (actual Assuan) justo al sur de Alejandría cuando está ligeramente hacia el este. Además Siena está a unos 50 km del [Trópico](#) (es la línea imaginaria, paralela al ecuador, donde al mediodía del 21 de junio el Sol está exactamente en la vertical) por lo que la sombra en los pozos no desaparece completamente. Tampoco sabía que la Tierra no es esférica, sino que es ligeramente achatada en sus polos. Aun reparando en estos errores (entendibles dado el conocimiento que se tenía hace más de 2200 años), el cálculo, y sobre todo el método utilizado por Eratóstenes nos sorprende hasta el día de hoy.

Actividad. Mediodía Solar

Materiales

- Un palo de escoba o un tubo de PVC de aprox. un metro
- Una base de madera o un lugar donde enterrar el palo de escoba
- Una escuadra

Indicaciones para el docente

- Es indispensable que exista Sol al momento de hacer estas mediciones.
- El mediodía solar no es el mismo para cada lugar de nuestro país, puesto que depende de la latitud y longitud en que se realice la medición. Para acotar el tiempo de mediciones, realice sus mediciones entre las XXXXXXXXXXXX y las XXXXXXXXXXXX (rango en que ocurrirá el mediodía solar). Si realiza sus mediciones después del primer sábado de octubre (en que se adelantan los relojes una hora) ajuste sus cálculos agregando una hora.
- No indique a los niños la hora real del mediodía solar. Una vez medido, explique los motivos de que el mediodía solar no calce con el mediodía horario, invitando a los niños a leer el texto que se plantea en las actividades.

Actividad: Mediodía Solar

Focalización

Todos los días vemos salir el Sol desde la cordillera, avanzar sobre nuestras cabezas por el cielo (vemos al Sol “subir” desde nuestro punto de vista), y luego ocultarse por la tarde en el mar. ¿A qué hora crees tú que el Sol está en el punto más alto del cielo?

Exploración

Para respondernos esta pregunta te invitamos a desarrollar una actividad muy sencilla

- Clava en el suelo o sobre un trozo de madera un palo de escoba. Debes ubicarlo en un lugar donde el Sol lo alumbre
- Con la escuadra asegúrate que el palo esté perpendicular (en 90°) respecto del suelo
- Observa la sombra que proyecta el palo sobre el suelo. Cada un minuto registra en una tabla como la que se muestra abajo la hora y el largo de la sombra. Tu profesor te indicará en qué rango de tiempo deberás realizar tu medición
-

Hora	Largo de la sombra

Reflexión

- Mirando los datos de tu tabla ¿A qué hora se produce la sombra más corta?

- Según lo observado ¿A qué hora el Sol estaría en su punto más alto en el cielo?

¿Qué es el Mediodía Solar?²

El Mediodía Solar ocurre cada día cuando el Sol está en su punto más alto en el cielo. Esto sucede cuando el Sol cruza el Meridiano Celeste (que también es conocido como Círculo Cenital).

Durante los Equinoccios (aproximadamente el 21 marzo y el 21 de septiembre), el Sol está verticalmente sobre (en el cenit de) los puntos situados en el Ecuador. Así, en los Equinoccios, en el Mediodía Solar, el Sol está al Sur en el Hemisferio Norte y al Norte en el Hemisferio Sur.

En los Solsticios, el Sol está verticalmente sobre los lugares situados en los Trópicos (en el Trópico de Cáncer, latitud $23\frac{1}{2}^{\circ}\text{N}$, para el Solsticio de Junio, que es el de Verano para el Hemisferio Norte y el de Invierno para el Hemisferio Sur y en el Trópico de Capricornio, latitud $23\frac{1}{2}^{\circ}\text{S}$, para el Solsticio de Diciembre, que es el de Verano para el Hemisferio Sur y el de Invierno para el Hemisferio Norte)

¿Por qué esto es importante?

Las sombras producidas por la luz del Sol tienen su menor longitud cuando el Sol está en el lugar más alto en el cielo. Este instante se llama Mediodía Solar. La longitud de la sombra más corta nos permite saber el ángulo que forman los rayos del Sol con la recta vertical (en cada lugar geográfico donde se realice esta medición). Comparando estos ángulos determinados en dos lugares distintos, es posible estimar la circunferencia y el radio de la Tierra de una manera similar a la que hizo Eratóstenes hace más de 2.000 años.

² Adaptado de http://www.midetumundo.org/meas_solarnoon.html

Triángulos semejantes y la medición de la Tierra

Materiales

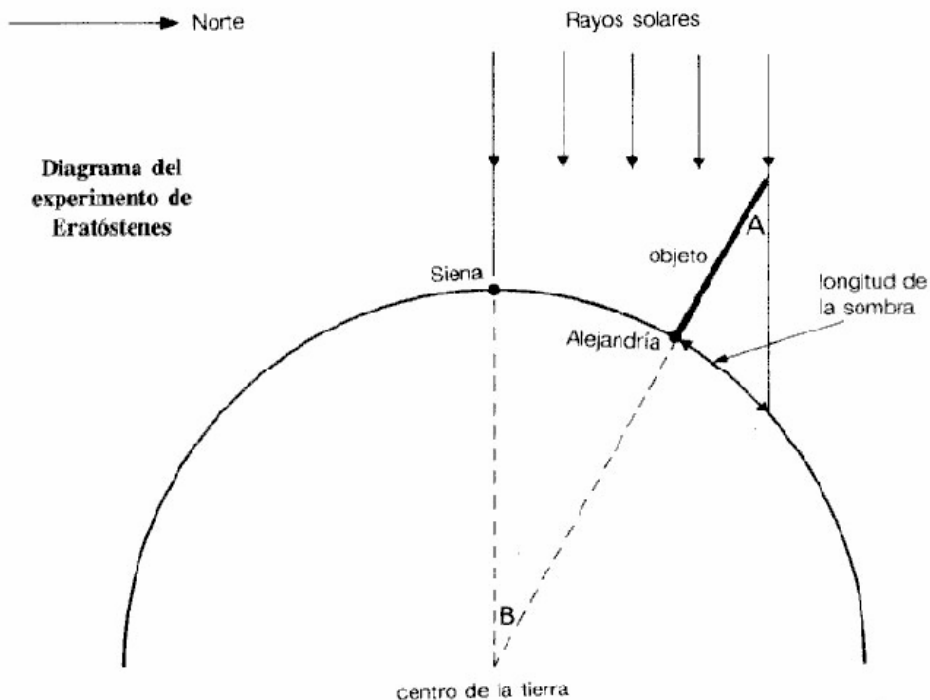
- Una hoja de cuaderno cuadriculada
- Una regla
- Un transportador

Focalización

Cuando Eratóstenes realizó sus cálculos utilizó un poco de Geometría. Él determinó que existían relaciones entre los diferentes triángulos que se formaban en su experimento. En esta actividad investigaremos qué parecidos y diferencias hay entre los triángulos que se forman en este maravilloso experimento

Exploración

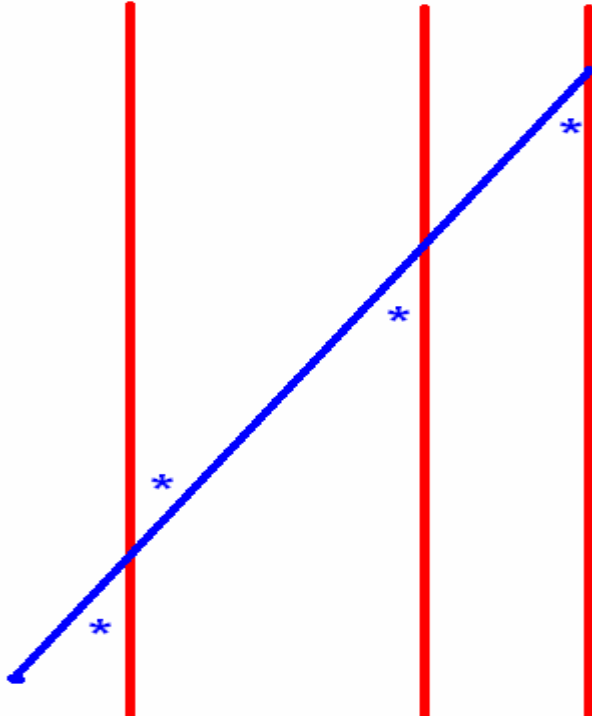
El experimento de Eratóstenes se muestra en el siguiente diagrama



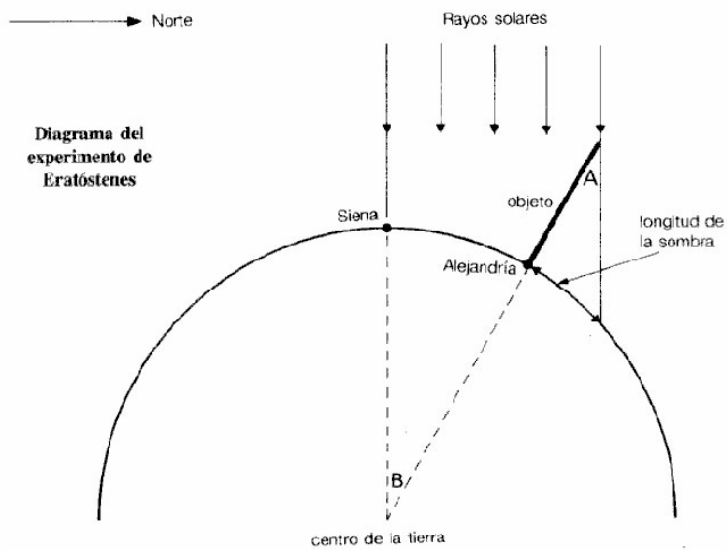
Lo que observó Eratóstenes es similar a lo que aparece en el dibujo de arriba. Él conocía la distancia de Siena a Alejandría, la longitud de la sombra y el largo de la estaca puesta en Alejandría. Fíjate que los rayos solares caen todos paralelos entre sí.

Primera parte: Los ángulos como los vió Eratóstenes

- En tu hoja cuadriculada dibuja dos líneas paralelas de arriba abajo, separadas por unos 8 cuadrados. A unos tres cuadrados a la derecha de la última línea dibujada, dibuja una tercera línea. Guíate por los cuadrados de tu cuaderno para hacer las líneas. Cada línea representa un rayo de sol sobre la Tierra
- Dibuja una línea diagonal que cruce las tres líneas que ya dibujaste. Trata de usar un color distinto para distinguirla bien. Debería quedarte un dibujo como el de abajo



- Con tu transportador, mide los ángulos que aparecen en el dibujo con un *. ¿Qué relación hay entre ellos?
- Observando nuevamente el esquema de Eratóstenes, ¿Qué relación habría entre el ángulo A y B?



Segunda parte: Los ángulos como los mediremos en nuestra experiencia

En nuestra experiencia, como no la realizaremos en las mismas condiciones que Eratóstenes, tendremos que hacer algunos ajustes para medir los ángulos

- En otra hoja cuadriculada dibuja tres líneas levemente inclinadas. Puedes hacerlas partiendo desde una esquina de un recuadro y llegando al final de la página hasta la esquina del recuadro siguiente hacia la derecha
- Dibuja una línea por la línea que está dibujada en la cuadrícula (como aparece en la figura de más abajo). Dibuja además una diagonal, igual que en la primera parte. Estas líneas (representadas en verde abajo) corresponden a la extensión de las estacas hasta el centro de la Tierra, en el caso de nuestro experimento



- Mide los ángulos indicados con * y **. En relación con esos ángulos, ¿Cuánto mide el ángulo A?

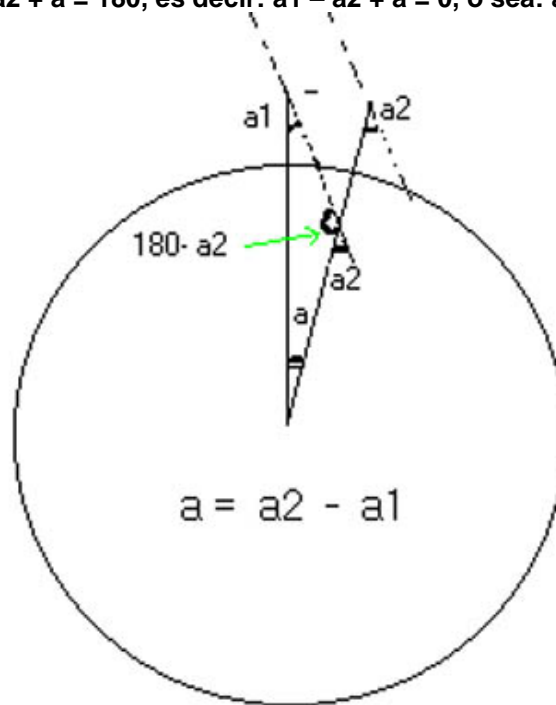
Reflexión

- Si llamamos * y ** a los ángulos formados por las estacas contra la Tierra, ¿Con qué fórmula podríamos calcular el valor del ángulo A?

Los ángulos en nuestro experimento³

La figura de más abajo representa nuestro experimento. Fíjate en el triángulo que se forma, con ángulos a , a_1 y $180-a_2$, donde a es el ángulo del arco de meridiano comprendido entre las posiciones que ocupan ambas estacas, que en el caso de Eratóstenes era el arco que se formaba entre Siena y Alejandría. a_1 y a_2 son los ángulos que forman los rayos solares con la dirección de las estacas. Podemos ver que, al sumar 180° los tres ángulos del triángulo es:

$$a_1 + 180 - a_2 + a = 180, \text{ es decir: } a_1 - a_2 + a = 0, \text{ o sea: } a = a_2 - a_1$$



Conocido el ángulo a , y la longitud L del arco de meridiano entre ambos puntos de colocación de las estacas, será posible, mediante una sencilla regla de tres, encontrar la longitud total, X , de la circunferencia del planeta:

$$\left. \begin{array}{l} a^\circ \text{-----} \rightarrow L \\ 360^\circ \text{-----} \rightarrow X \end{array} \right\} \Rightarrow X = \frac{360 \cdot L}{a}$$

y, de aquí, el radio medio de la Tierra:

$$\frac{360 \cdot L}{a} = 2\pi \cdot R \Rightarrow R = \frac{360 \cdot L}{2\pi \cdot a}$$

³ Adaptado de <http://personales.ya.com/casanchi/rec/eratos.htm>

Actividad
Midiendo ángulos para la medición de la circunferencia de la Tierra

Te proponemos aquí dos formas de medir el ángulo que se forma por la estaca y la sombra que produce sobre la Tierra en el mediodía Solar. La primera la puedes hacer sin muchos conocimientos matemáticos. La segunda forma requiere conocer un poco de Trigonometría. Para el día de las mediciones usen la forma que les resulte más simple.

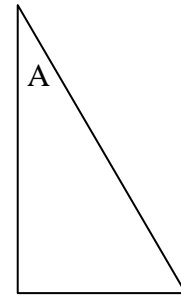
1. Midiendo con un dibujo a escala

Materiales

- Una cartulina o papel kraft de más de un metro de largo
- Plumones
- Regla
- Escuadra
- Transportador

Actividad

- Recuerda que la vara que estamos usando mide exactamente un metro. Haremos un dibujo a escala real de la estaca y su sombra
- En la cartulina o papel kraft (papel de papelografo) con una regla dibuja (con un plumón) una línea de exactamente un metro de largo
- En la base de esa línea, usando una escuadra, dibuja una línea que mida exactamente lo que midió la sombra más pequeña que hayan medido en la experiencia de medición de sombras
- Traza la diagonal para completar el triángulo
- Usando tu transportador, mide el ángulo A (que es el necesario para nuestras mediciones)



2. Midiendo el ángulo usando trigonometría

- En el triángulo formado por la estaca y su sombra, el largo de la estaca corresponde al cateto adyacente del ángulo superior y la sombra corresponde al cateto opuesto. Por trigonometría sabemos que

$$\text{Tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Es decir

$$\text{Tan } A = \frac{\text{largo de la sombra}}{\text{largo de la vara}}$$

Para obtener el valor del ángulo A simplemente aplicamos función inversa (arcotangente) para obtener finalmente que

$$A = \text{Arc tan} \left(\frac{\text{largo de la sombra}}{\text{largo de la vara}} \right)$$

Simulación
Midiendo la circunferencia de una pelota

Materiales

- Una pelota de plumavit lo más grande posible
- Mondadientes
- Una lámpara
- Regla, transportador, lápices

Indicaciones para el docente

- La idea de esta actividad es chequear en qué medida los estudiantes dominan los concretos necesarios para realizar la experiencia de medición de la circunferencia de la Tierra. Le proponemos que esta sea una actividad guiada, en que usted les entregue las orientaciones generales y sean ellos quienes desarrollen el trabajo
- En la pelota deben ensartarse dos mondadientes. Ambos deben estar lo más perpendiculares posible a la esfera. Se debe medir hasta que punto son enterrados para saber luego el largo de cada “estaca” (en esta simulación la parte del mondadientes que sobresale de la esfera corresponde a la vara o estaca usada por Arquímedes en su experiencia)
- Una vez hecho esto se debe apuntar hacia la ampollita la esfera hasta que uno de los mondadientes no de sombra. En ese punto se debe marcar con un lápiz la sombra dibujada por el otro mondadientes
- Siguiendo los procedimientos indicados en las actividades anteriores se puede calcular la circunferencia (perímetro) y el radio de ella, la que puede confrontarse con el dato real que indica la etiqueta de la esfera (si se compra en tienda en la etiqueta o código de barras se indica el radio de la esfera)
- Si no se cuenta con ese dato, ayude a sus estudiantes a encontrar una forma de corroborar sus resultados. Normalmente las esferas de plumavit están hechas de dos mitades, las que se distinguen en la esfera. Siguiendo la línea que las une se puede medir el perímetro de la circunferencia de la esfera.