Von Neumann y la mosca

La vida del célebre matemático húngaro John Von Neumann está repleta de sabrosas anécdotas. Entre mis predilectas se cuenta que en cierta ocasión le propusieron un problema muy singular, cuyo principal protagonista era una mosca: *Dos trenes separados por una distancia de 200 kilómetros (km) se ponen en marcha simultáneamente uno hacia el otro, con una rapidez de 50 kilómetros por hora (km/h). En el mismo instante, una mosca que se encuentra posada en el extremo delantero de uno de los trenes, emprende vuelo hacia el frente del otro, con una rapidez de 75 km/h. Al llegar al segundo tren, la mosca regresa inmediatamente al primero, sin perder tiempo, y así continua su recorrido de un ferrocarril hacia otro, viajando siempre en línea recta, hasta que finalmente los trenes chocan con la mosca en medio. ¿Cuál es la distancia recorrida por la mosca?*

Para un hombre de la talla intelectual del húngaro, semejante pregunta no representaba ningún desafío. Prueba de ello es que su respuesta fue instantánea: "150 *km*". Desconcertado por la agilidad mental de von Neumann, su interrogador replicó: "me sorprende su respuesta, pues todo el mundo intenta resolver el problema sumando la serie infinita" ante lo cual von Neumann contestó imperturbable: "¿es que acaso existe otra solución?"

John Von Neumann (1903-1957) destacó por ser capaz de aplicar las matemáticas a campos muy diversos. Al comienzo de su carrera, en Europa, trabajó en la aplicación de las matemáticas a la mecánica cuántica. Desde su llegada a los Estados Unidos en 1933, donde continuaría trabajando hasta el final de su vida, se interesó por la aplicación de las matemáticas a la economía, fundando la teoría de juegos. En 1943 fue reclutado por el gobierno de los Estados Unidos para trabajar en el desarrollo de la bomba atómica. Muy pronto, se interesó por los primeros ordenadores contribuyendo a revolucionar su arquitectura. Además, hizo aportaciones importantes a campos tan dispares como la hidrodinámica, la meteorología y la balística. En sus últimos años centró su interés en la inteligencia artificial y la vida. Comenzó a desarrollar una teoría de autómatas celulares capaces de autoreproducirse, aunque su temprana muerte debido a un cáncer cuando solo tenía 54 años, impidió que concluyese el trabajo.

Para aquellos que carecen de una adecuada formación matemática, hay que señalar que la gracia de esta anécdota radica en la existencia de dos soluciones al problema de la mosca: la primera es muy simple y sólo requiere de algunas consideraciones elementales de física, en tanto la segunda es bastante más compleja y consiste en sumar una *serie geométrica infinita*, lo cual, llevado al problema que nos ocupa, implica sumar todos los desplazamientos efectuados por la mosca al viajar desde un tren hacia el otro. Este fue precisamente el camino que siguió Von Neumann para llegar a la solución del acertijo. Muchos estudiantes de matemáticas y ciencias no vacilarían en adoptar el enfoque del húngaro, lo cual requiere determinar aquello que en la jerga matemática se conoce como el *término general* y la *razón* de la serie geométrica... una vez que se ha emprendido este camino, es posible dedicar extenuantes horas a encontrar la solución, sin vislumbrar la posibilidad de resolver el problema en forma simple.

Para sopesar la extraordinaria hazaña realizada por von Neumann, conviene analizar detenidamente la solución compleja. Afortunadamente, pese a requerir una cantidad considerable de trabajo algebraico, y a la dificultad que implica formular adecuadamente el problema, dicha solución puede ser comprendida por cualquier estudiante que sepa resolver un sencillo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y que conozca la fórmula para sumar los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que la unidad. Sin embargo, dado que se trata de un problema de carácter eminentemente matemático, su discusión ha sido reservada para el apartado al final del artículo.

Adentrémonos entonces en la solución simple, no sin antes advertir que pese a su presunta sencillez, nuestro análisis demandará una buena dosis de esfuerzo para los no iniciados. Puede, por tanto, ser usado por los profesores como un entretenido y estimulante ejercicio en clases. Antes de entrar en materia, no debemos perder de vista que nuestro objetivo consiste en determinar el camino total recorrido por la mosca en sus vuelos de ida y regreso desde la punta de cada ferrocarril. Haciendo uso de argumentos matemáticos muy simples, es fácil constatar que si un objeto se desplaza con rapidez constante y en línea recta –como es el caso de la mosca– la distancia que recorra será igual al producto de su rapidez por el tiempo empleado en el trayecto. Como ejemplo, si usted se encuentra viajando a bordo de un vehículo que sigue una trayectoria rectilínea con rapidez constante de $50km/h$, entonces cuando haya transcurrido 1 hora ($1h$) habrá viajado $50km$. Del mismo modo, después de $2h$ de viaje habrá recorrido $2h \times 50km/h = 100km$, y a las tres horas se encontrará a una distancia de $3h \times 50km/h = 150km$ del punto de partida. En otras palabras, la distancia recorrida siempre resulta del producto entre el tiempo empleado en recorrerla, y la correspondiente rapidez. Si queremos expresar este resultado de manera más concisa podemos escribir:

$$\textit{Distancia recorrida} = \textit{rapidez} \times \textit{tiempo}$$

Ahora bien, ¿cuánto tiempo transcurre desde que la mosca emprende el vuelo, hasta que muere trágicamente aplastada en medio de ambos trenes? La forma más simple de encontrar este tiempo consiste en notar que el camino recorrido por cada ferrocarril hasta el momento del impacto, es igual a la mitad de la distancia que les separa inicialmente, y dado que dicha separación es de $200km$, cada tren habrá recorrido $100km$ al momento de aplastar a la mosca. Visto desde otra perspectiva, debemos recordar que los trenes se mueven en línea recta uno hacia el otro con igual rapidez, de modo que por la simetría del problema, resulta evidente que sólo pueden chocar en el punto medio de su recorrido. Por otra parte, sabemos que los trenes se desplazan $50km$ en cada hora (no olvidemos que se mueven a $50km/h$), de modo que les tomará exactamente dos horas recorrer los $100km$ que les separa del lugar del impacto.

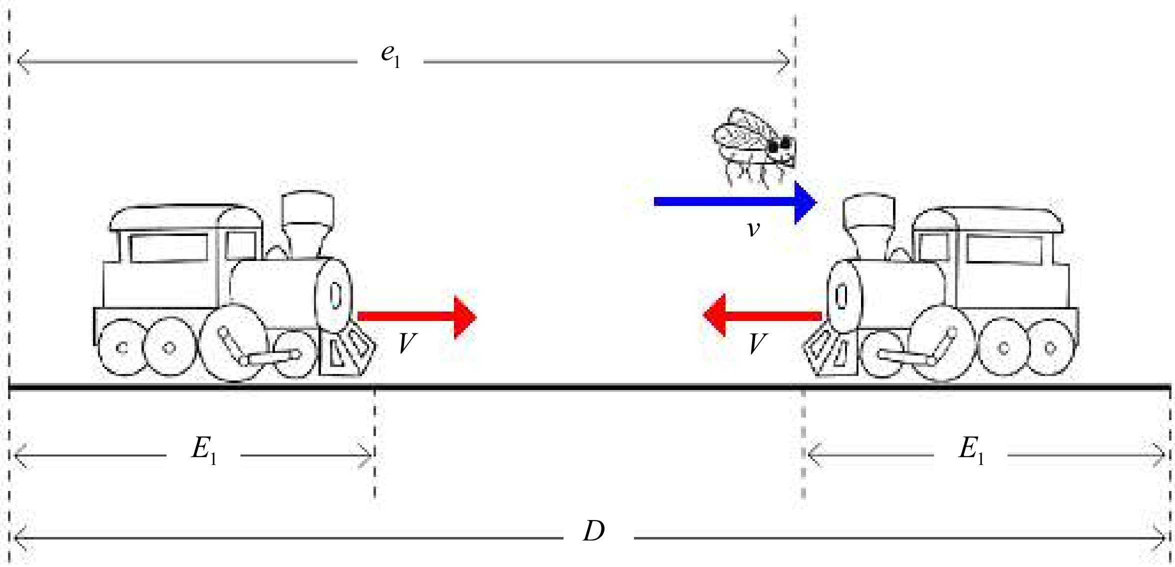
Por si aún no lo ha notado, ya tenemos todo lo necesario para encontrar la solución a nuestro acertijo. En efecto, la respuesta al problema que nos ocupa estará dada por el producto entre la rapidez de la mosca ($75km/h$) y el intervalo de tiempo calculado antes ($2h$). Efectuando la multiplicación entre estas cantidades se encuentra que la distancia total recorrida tiene el valor:

$$\textit{Distancia recorrida} = 2h \times 75km/h = 150km$$

Finalmente, para tranquilidad de aquellos lectores preocupados por el cruel destino de la mosca, debo agregar que los acontecimientos descritos son pura ficción, y todo parecido con la realidad no es más que coincidencia.

¿Quiere saber más?

Analicemos ahora la solución compleja, que fue la ideada por von Neumann para resolver el problema de la mosca.



Antes de comenzar nuestro análisis, necesitamos definir las siguientes cantidades:

- D : Distancia que separa inicialmente a los trenes (200*km*).
- e_n : Distancia recorrida por la mosca en su viaje número n.
- E_1 : Distancia recorrida por cada tren durante el primer viaje de la mosca ($n = 1$).
- S : Distancia total recorrida por la mosca hasta que los trenes chocan.
- V : Rapidez de los trenes (50*km/h*).
- v : Rapidez de la mosca (75*km/h*).

A partir de la figura se observa claramente que cuando la mosca a recorrido la distancia inicial e_1 (primer viaje, $n = 1$), el espacio E_1 que se ha desplazado cada tren será el mismo, de modo que la distancia D debe ser igual a la suma de e_1 y E_1. Por otra parte, el tiempo t que le toma a la mosca viajar desde un tren al otro es el mismo que emplea cada tren en recorrer E_1; además, t viene dado por la razón entre las distancias y las rapideces ($t = e_1/v = E_1/V$). En consecuencia, podemos escribir el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a partir del cual es posible obtener el valor de e_1 :

$$e_1 + E_1 = D$$

$$\frac{e_1}{E_1} = \frac{v}{V}$$

Despejando E_1 de la primera ecuación e introduciéndola en la segunda resulta,

$$\frac{e_1}{D-e_1}=\frac{v}{V}$$

Eliminando los denominadores,

$$e_1V=(D-e_1)v=Dv-e_1v$$

Reagrupando términos y factorizando por e_1 se obtiene,

$$e_1=\frac{v}{V+v}D=\alpha D$$

Donde hemos definido la cantidad α como,

$$\alpha=\frac{v}{V+v}$$

Ahora bien, cuando la mosca se ha desplazado el espacio e_1 hasta posarse sobre el extremo del segundo tren, estos se encuentran separados una distancia $D - 2E_1$. Aplicando el mismo razonamiento desarrollado más arriba, concluimos que en su viaje de regreso al primer tren (segundo viaje, $n=2$), la mosca recorrerá una fracción α de la distancia que ahora les separa, vale decir,

$$\begin{aligned}e_2&=\alpha(D-2E_1)=\alpha\left[D-2(D-e_1)\right]=\alpha(2e_1-D)=\alpha\left(2e_1-\frac{e_1}{\alpha}\right)\\&=e_1(2\alpha-1)=e_1\left(2\frac{v}{v+V}-1\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e_2=\frac{v-V}{v+V}e_1$$

Como el planteamiento del problema para los restantes viajes de la mosca es idéntico al que hemos usado hasta ahora, podemos concluir que las distancias e_1, e_2, e_3 ... e_n recorridas por la mosca en cada viaje, formarán una progresión geométrica de primer término $e_1 = \alpha D$ y razón $2\alpha - 1 = (v - V)/(v + V)$. Puesto que la razón de la progresión es menor que la unidad, es posible sumar los infinitos términos que la componen, obteniendo como resultado un valor finito, es decir, la suma converge.

Aplicando directamente la formula para la sumatoria de los términos de una progresión geométrica resulta,

$$S = e_1 \frac{1}{1-(2\alpha-1)} = \alpha D \frac{1}{1-(2\alpha-1)} = \frac{\alpha D}{2(1-\alpha)}$$

Y como $\alpha = v/(v+V)$ se obtiene finalmente,

$$S = \frac{Dv}{2V} = \frac{200km \times 75km/h}{2 \times 50km/h} = 150km$$

Hemos llegado el mismo resultado que por el método simple.

Jorge Pinochet I.
Licenciado en física, Universidad Católica de Chile.